Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2014
Klasse 11./12., Gruppe 2

Synthetische Differentialgeometrie

Zirkelzettel vom 31. Mai 2014 und 14. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine *infinitesimale Zahl* ε ist eine Zahl, deren Quadrat Null ist: $\varepsilon^2 = 0$. In der gewöhnlichen mathematischen Welt gibt es nur eine einzige infinitesimale Zahl, nämlich die Zahl 0. Für gewisse Anwendungen wäre es aber schön, wenn es auch interessantere infinitesimale Zahlen gäbe. Ähnlich wie bei den komplexen Zahlen kann man solche Zahlen *künstlich* konstruieren; anders als bei den komplexen Zahlen muss man dafür aber gleich ein ganzes neues *mathematisches Universum* errichten.

Das Teilgebiet der Mathematik, in dem man solche Universen studiert, heißt *synthetische Differentialgeometrie* und ist ein relativ junges Forschungsgebiet. Erste Ideen gehen auf die alten Griechen und Versuche des dänischen Mathematikers Johannes Hjelmslev zurück (* 1873, † 1950), richtig initiiert und ausgearbeitet wurde das Gebiet aber erst in den 1970er Jahren durch William Lawvere (Amerikaner) und Anders Kock (ebenfalls Däne). Beide sind noch aktiv.

Im Folgenden werden wir lernen, wozu infinitesimale Zahlen nützlich sind; wie man in diesem alternativen Universum arbeiten kann; und schließlich inwieweit Resultate, die man in der neuen mathematischen Welt erzielt, auch in der gewöhnlichen mathematischen Welt Gültigkeit haben. Ohne diesen letzten Punkt wäre unser Unterfangen ein reines Gedankenexperiment ohne Nutzen. Die Vorteile von synthetischer Differentialgeometrie haben übrigens einen interessanten Preis, den wir auch verstehen werden.

Dreh- und Angelpunkt für synthetische Differentialgeometrie ist ein Axiom, das *klassisch* – das heißt im gewöhnlichen mathematischen Universum – falsch ist:

Axiom der Mikroaffinität. Sei $\Delta := \{\varepsilon \in \mathbb{R} \,|\, \varepsilon^2 = 0\}$ die *infinitesimale Monade* um 0. Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es gewisse eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b, sodass für alle Zahlen ε in Δ folgende Gleichung gilt:

$$f(\varepsilon) = a + b\varepsilon.$$

Wir werden etwas Zeit benötigen, um zunächst überhaupt die Aussage dieses Axioms zu verstehen und dann seine Konsequenzen zu überblicken. Teile des Theoriegebäudes erarbeiten wir uns in Aufgaben. Diese solltest du also auch beim ersten Lesen nicht überfliegen.

Warnung. Ab einer bestimmten Stelle werden wir leicht andere logische Gesetze verwenden als in der Schule. Insbesondere werden deine Lehrerinnen und Lehrer vielleicht nicht erfreut sein, wenn du sie in Hausaufgaben oder Prüfungen verwendest.

2 Motivation für infinitesimale Zahlen

Schnitte. In Abbildung 1 sind zwei Situationen skizziert, bei denen sich jeweils zwei Kurven schneiden. (Gerade Linien zählen auch als *Kurven.*) Es ist offensichtlich, dass sich im ersten Bild die beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Schnittsituation beim zweiten Bild ist dagegen weniger klar. In klassischer Mathematik konstatiert man, der Schnitt bestehe ebenfalls aus nur genau einem Punkt, nämlich dem Ursprung. In der Tat könnte man keinen weiteren Punkt benennen, der ebenfalls auf beiden Kurven liegen würde. Anschaulich scheint es aber ja doch einen Unterschied zu geben – man benötigt infinitesimale Zahlen, um ihn auf direkte Art und Weise mathematisch einzufangen.[1]

[1] Indirekt geht es auch in klassischer Mathematik: Die Parabel hat bei der Stelle $x = 0$ eine *doppelte Nullstelle*. Das bedeutet, dass nicht nur der Funktionswert dort Null ist, sondern auch noch die erste Ableitung.

Aufgabe 1. *Schnittberechnung I*

Die Gleichungen der beiden Kurven im ersten Bild sind

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x, & (1) \\ y = 0. & (2) \end{cases}$$

Die erste Gleichung gehört zur schrägen Gerade, die zweite zur x-Achse (auf der alle Punkte als y-Koordinate Null haben). Die Gleichungen der Kurven im zweiten Bild sind

$$\begin{cases} y = x^2, & (3) \\ y = 0. & (4) \end{cases}$$

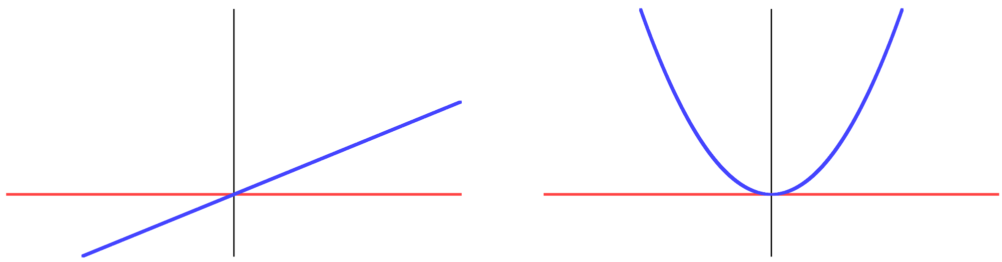
a) Löse das erste Gleichungssystem, um zu beweisen: Der einzige Schnittpunkt $(x|y)$ hat die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$. Wieso entspricht das Schneiden der beiden Kurven rechnerisch der Lösungsmenge des kombinierten Gleichungssystems?

b) Löse das zweite Gleichungssystem, um zu beweisen, dass ein Punkt $(x|y)$ genau dann im Schnittbereich des zweiten Bilds liegt, wenn seine y-Koordinate Null und seine x-Koordinate eine infinitesimale Zahl ist (also $x^2 = 0$ erfüllt).

   Hierbei ist es wichtig, mit Absicht langsam zu rechnen, um nicht durch zu schnelles Vereinfachen die Pointe vorwegzunehmen. In klassischer Mathematik gilt die Regel „wenn $x^2 = 0$, dann auch $x = 0$"; erst mit dieser Regel vereinfacht sich das Ergebnis, dann zu demselben wie in Teilaufgabe a).

Physik. Infinitesimale Zahlen sind ferner in der Physik nützlich. Dort hat man es manchmal mit „sehr kleinen" (aber nicht verschwindenden) Größen wie etwa Differenzen Δx zu tun. Da das Quadrat einer kleinen Zahl nochmals kleiner und „wirklich winzig" ist, erlaubt man sich, in Rechnungen Quadrate von Δx einfach wegzulassen. Das ist mathematisch natürlich nicht zulässig – trotzdem haben die Physikerinnen und Physiker mit diesem Vorgehen offensichtlich großen Erfolg!

Abbildung 1 Schnitt (a) einer schrägen Gerade bzw. (b) einer Parabel mit der x-Achse.



Mathematikerinnen und Mathematiker sollten die physikalischen Methoden nicht blind verurteilen, sondern sie ernst nehmen und Möglichkeiten finden, sie mathematisch sauber und rigoros zu verstehen. Infinitesimale Zahlen bieten eine solche Möglichkeit.

Aufgabe 2. *Quadrate großer und kleiner Zahlen*

a) Sei x eine reelle Zahl, die größer als 1 ist. Zeige: Das Quadrat x^2 ist größer als x.

b) Sei x eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Zeige: Das Quadrat x^2 ist kleiner als x.

Wenn die Dezimalentwicklung von x mit n Nullen nach dem Komma beginnt, mit etwa wie vielen Nullen beginnt dann die Dezimalentwicklung von x^2?

Differentialrechnung. Infinitesimale Zahlen sind ferner fürs Differenzieren nützlich: Sie ermöglichen es nämlich, auf gewisse Grenzwertprozesse zu verzichten und gleichzeitig näher an der Anschauung zu bleiben. Zur Erinnerung wollen wir die übliche Definition der Ableitung rekapitulieren:

Definition 2.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Stelle. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

existiert, so heißt f an der Stelle x_0 *differenzierbar* und die Ableitung $f'(x_0)$ ist per Definition dieser Grenzwert.

Aufgabe 3. *Intuition zum Differentialquotienten*

Erinnere dich, inwieweit der Bruch

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

für festes ε eine *Sekantensteigung* angibt, und erkläre anhand einer Skizze, wieso der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ anschaulich die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$ misst.

Um die Definition besser zu verstehen, möchten wir ohne Verwendung der bekannten Ableitungsregeln die Ableitung der Quadratfunktion bestimmen.

Proposition 2.2. *Die Quadratfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2x$.*

Beweis. In der Schule würde man in einer langen Gleichungskette die Definition so lange vereinfachen, bis der Grenzwert unmittelbar ablesbar ist. Dabei müsste man in jedem

Schritt das lim-Symbol mitführen, würde das aber vielleicht auch oftmals vergessen. Übersichtlicher ist folgende an der Uni übliche Schreibweise:

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2-x^2}{\varepsilon} = 2x+\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2x. \qquad \square$$

An diesem Beweis ist an sich nichts auszusetzen. Die Rechnung selbst ist genügend einfach, durch die Grenzwertüberlegung aber trotzdem logisch nicht ganz elementar. Die Physikerinnen und Physiker haben eine einfachere Möglichkeit, die Aussage zu „beweisen“ – eine, die ohne Grenzwerte auskommt:

PhysikerInnen-Beweis. Sei ε „sehr klein“. Dann gilt:

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2-x^2}{\varepsilon} = 2x+\varepsilon = 2x. \qquad \square$$

Bemerkenswert ist die schizophrene Natur dieses Arguments: Zum einen lässt man im letzten Schritt den Term ε einfach weg – mit der Begründung, ε sei schließlich „sehr klein“. Andererseits aber teilt man durch ε – das ginge nur, wenn man wüsste, dass ε positiv oder negativ, aber jedenfalls nicht Null ist.

Außerdem sollte man auch zu Beginn der Rechnung die Vereinfachung $f(x+\varepsilon)-f(x) = f(x)-f(x) = 0$ treffen dürfen, wenn man doch am Ende ebenfalls einfach ε weglassen durfte. Schließlich sollten sich die Rechengesetze nicht inmitten einer Rechnung ändern. Dann wäre das Ergebnis insgesamt $f'(x) = 0$ – das ist jedoch eine unsinnige Behauptung.

Aus diesen Gründen wird das PhysikerInnen-Argument in klassischer Mathematik nicht akzeptiert. Mit den infinitesimalen Zahlen aus synthetischer Differentialgeometrie werden wir aber in der Lage sein, die wesentlichen Ideen des PhysikerInnen-Arguments in einen mathematisch einwandfreien Beweis zu gießen. So können wir die Vorteile beider Welten – einfache Rechnungen einerseits und mathematische Rigorosität andererseits – vereinen.[2]

Aufgabe 4. *Ableitung der Kubikfunktion I*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ die Kubikfunktion. Verifiziere direkt anhand der mathematischen Definition, dass f überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist.

Hinweis: Den Ausdruck $(x+\varepsilon)^3$ kann man entweder durch mehrmaliges Ausmultiplizieren oder direkt durch Verwendung der binomischen Formel für Kuben statt Quadrate vereinfachen. (Die Koeffizienten der allgemeinen binomischen Formel stehen im Pascalschen Dreieck.)

[2]Man sollte noch bemerken, dass wir es in der Analyse des PhysikerInnen-Arguments einer spannenden Geschichte wegen absichtlich auf ein Missverständnis angelegt haben. Die Lücken in dem Argument verschwinden alle, wenn man es geeignet liest. Der letzte Schritt im Argument, „$2x+\varepsilon = 2x$“, ist wörtlich interpretiert offensichtlich falsch. Da das offensichtlich ist, kann man aber das Gleichheitszeichen ohne Verwirrungen hervorzurufen auch mit einer schwächeren Bedeutung verwenden, nämlich als „beide Seiten sind *bis auf Terme erster Ordnung* gleich“. In diesem Sinn ist das Argument einwandfrei.

Aufgabe 5. *Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen*

a) Die Betragsfunktion (siehe Abbildung 2(a)) ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Anschaulich erkennt man das daran, dass der Graph am Punkt $(0|0)$ keine Tangente besitzt.[3] Bestätige diese Beobachtung anhand der Definition über den Differentialquotienten: Die Sekantensteigungen konvergieren für $\varepsilon \to 0$ nicht gegen einen bestimmten Wert, sondern ...

   Wenn du möchtest, kannst du das auch noch rechnerisch nachvollziehen. Berechne den *links*- und den *rechtsseitigen* Grenzwert des Differenzenquotienten. Nutze dazu folgende Definition der Betragsfunktion:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

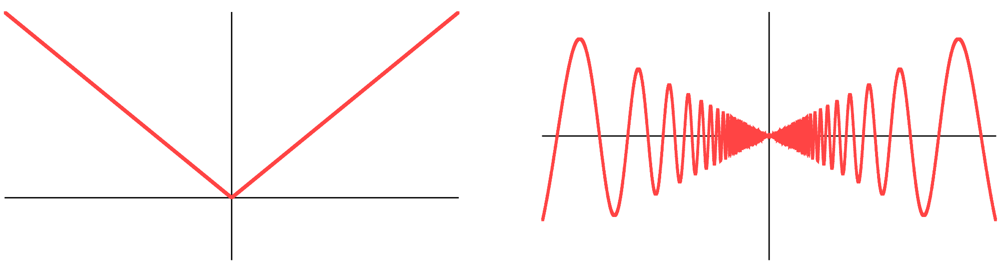
b) Es gibt auch Funktionen, deren Graphen keine offensichtlichen Knickpunkte haben und die trotzdem nicht überall differenzierbar sind. Erkläre anschaulich und zeige rechnerisch, dass folgende Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist (siehe Abbildung 2(b)):

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

   (Diese Funktion ist übrigens durchaus *stetig*.)

[3] Man kann an dieser Stelle durchaus Geraden anlegen, es gibt aber keine besonders überzeugende Wahl einer *berührenden* Gerade. Fortgeschrittene Differentialrechnung wird mit dieser Uneindeutigkeit durch den Begriff der *Subgradienten* von konvexen Funktionen fertig.

Abbildung 2 Diese Funktionen sind im Nullpunkt nicht differenzierbar.



3 Exkurs zu Mengen und Funktionen

Eine *Menge* reeller Zahlen kann man sich wie eine Einkaufstasche vorstellen, die statt leckerer Äpfel gewisse reelle Zahlen enthält. Die Zahlen, die in einer Menge vorkommen, heißen *Elemente* dieser Menge. Mengen können auch unendlich viele oder gar keine Elemente enthalten. Es gibt drei Möglichkeiten, Mengen anzugeben:

$M = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$,

$M = \{4, 9, 16, \dots, 81\}$,

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ und } x \leq 81 \text{ und } x \text{ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl}\}$.

Im ersten Fall zählt man die Elemente der Menge einfach explizit auf. Im zweiten Fall erwartet man von seinem Gegenüber, die Regelmäßigkeit zu erkennen und die in der Notation nicht aufgeführten Elemente gedanklich zu ergänzen. Der dritte Fall liest sich wie folgt: Die Menge M ist die Menge all derjenigen reellen Zahlen („$x \in \mathbb{R}$"), welche ≥ 4, ≤ 81 und zugleich das Quadrat einer natürlichen Zahl sind; man sammelt also alle reellen Zahlen mit einer gewissen Eigenschaft auf.

Aufgabe 6. *Beispiele für Mengen*

Sei $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$. Skizziere die Menge M auf dem Zahlenstrahl.

Eine *Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Element ihrer *Definitionsmenge* D eine bestimmte reelle Zahl zu: Liegt x in D, so ist $f(x)$ eine bestimmte reelle Zahl. Für Zahlen x außerhalb der Definitionsmenge ist „$f(x)$" ein sinnloser Ausdruck.

Zuordnungen wie $f : x \mapsto \pm x$, für die $f(x)$ gewissermaßen mehrere Werte annimmt, führen nicht zu Funktionen, sondern zu *Relationen*. Solche werden wir im Folgenden nie betrachten.

Aufgabe 7. *Funktionen mit eingeschränkten Definitionsmengen*

a) Finde die größtmögliche Definitionsmenge D, sodass folgende Zuordnung Sinn ergibt:

$$f : D \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{1}{x}.$$

b) Der Term „x^2" ergibt für *alle* reellen Zahlen x Sinn, die größtmögliche Definitionsmenge der Zuordnung $x \mapsto x^2$ ist also die vollständige Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen. Man kann aber die Definitionsmenge auch künstlich einschränken:

$$f : [2; 4] \to \mathbb{R},\; x \mapsto x^2.$$

Dabei bezeichnet „$[2; 4]$" das abgeschlossene Intervall von 2 bis 4, also die Menge $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x \leq 4\}$. Skizziere den Verlauf dieser Funktion. (Das wird *nicht* die übliche Normalparabel.)

4 Das Axiom der Mikroaffinität

Im Axiom der Mikroaffinität kommt die *infinitesimale Monade um die Zahl* 0 vor. Damit ist folgende Menge reeller Zahlen gemeint:

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0\}.$$

Die Elemente von Δ sind also all diejenigen Zahlen, deren Quadrat Null ist. In klassischer Mathematik gilt die Regel „wenn das Quadrat einer Zahl Null ist, dann ist auch die Zahl selbst Null“. Daher besteht Δ in klassischer Mathematik nur aus der Zahl 0: $\Delta = \{0\}$.

Da wir uns in Kürze von klassischer Mathematik (vorläufig) verabschieden möchten, geben wir nun genau an, welche der Axiome klassischer Mathematik wir noch verwenden möchten:

- Die üblichen logischen Gesetze – mit einer wichtigen Ausnahme, die wir in Abschnitt 6 diskutieren werden.

  Ein logisches Gesetz besagt etwa: Wenn sowohl eine Aussage A als auch eine Aussage B stimmen, so stimmt insbesondere A. Ein anderes lautet: Wenn eine Aussage A stimmt und B eine weitere (vielleicht falsche) Aussage ist, so stimmt es auch, dass A oder B korrekt ist.[4]

- Die üblichen Rechenregeln zur Termvereinfachung.

$$\begin{aligned} 0 + x &= x & \qquad 1 \cdot x &= x \\ x + y &= y + x & \qquad x \cdot y &= y \cdot x \\ x + (y + z) &= (x + y) + z & \qquad x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \end{aligned}$$

- Das Axiom zu Gegenzahlen: Jede reelle Zahl besitzt eine zugehörige Gegenzahl – zu x gibt es eine Zahl $-x$ mit der Eigenschaft $x + (-x) = 0$.
- Das Axiom zu Inversen: Ist eine reelle Zahl *nicht Null*, so besitzt sie ein Inverses bezüglich der Multiplikation. In Formeln: Wenn $x \neq 0$, so gibt es eine Zahl y mit $xy = 1$. Das Inverse y wird üblicherweise als „$\frac{1}{x}$“ oder „x^{-1}“ geschrieben.
- Ein *Nichttrivialitätsaxiom*: $0 \neq 1$.
- Einige weitere Axiome, die wir aber erst dann einführen, wenn wir sie benötigen. Es sei nur noch verraten, dass wir die *Trichotomie* der Ordnung *nicht* verwenden. Diese würde besagen, dass jede Zahl entweder kleiner, gleich oder größer als Null ist.

[4] In der Mathematik ist „oder“ stets einschließend gemeint, wenn man nicht mit „entweder oder“ explizit die ausschließende Variante verwendet. Wenn ich also heute Abend Greg Egan lesen *und* später schlafen werde, so stimmt es insbesondere auch, dass ich heute Abend Greg Egan lesen *oder* schlafen werde.

Diese Axiome rechtfertigen jedenfalls *nicht* die Regel, der zufolge das Quadrat einer Zahl nur dann Null sein könne, wenn sie es selbst schon wäre. Auch wenn wir keine weiteren Elemente in Δ angeben können, können wir mit unserem reduzierten Satz an Axiomen daher trotzdem nicht schließen, dass Δ *nur* die Null enthalte.

Wir stellen uns die Menge Δ als eine *infinitesimale Umgebung* der Zahl 0 vor. Keine konkrete kleine positive Zahl liegt in Δ – etwa liegt ein Millionstel nicht in Δ, denn das Quadrat eines Millionstels ist nicht Null, sondern ein Billionstel. Wir stellen uns Δ eher als die Menge der (x-Koordinaten der) Schnittpunkte in Abbildung 1(b) vor.

Mathematisch erweckt das Axiom der Mikroaffinität die Menge Δ zum Leben und bestätigt dann unsere Intuition über Δ. Sobald wir dieses Axiom annehmen, verlassen wir klassische Mathematik.

Axiom der Mikroaffinität. Sei $\Delta := \{\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon^2 = 0\}$ die *infinitesimale Monade* um 0. Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es gewisse eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b, sodass für alle Zahlen ε in Δ folgende Gleichung gilt:

$$f(\varepsilon) = a + b\varepsilon.$$

Das Axiom spricht nicht über Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sondern nur über solche, deren Definitionsmengen die infinitesimale Monade Δ sind. Die Funktionswerte einer solchen Funktion können also nur in sehr begrenzten Ausmaßen variieren. Das Axiom besagt nun: Eine solche Funktion sieht stets wie eine affine Funktion aus, mit Achsenabschnitt a und Steigung b (Abbildung 3).[5]

Zu betonen ist auch, dass laut Axiom Achsenabschnitt a und Steigung b *eindeutig bestimmt* sind. Das bedeutet: Sollte für eine Funktion $f : \Delta \to \mathbb{R}$ nicht nur $f(\varepsilon) = a + b\varepsilon$, sondern auch $f(\varepsilon) = \tilde{a} + \tilde{b}\varepsilon$ für alle ε in Δ gelten, so folgt $a = \tilde{a}$ und $b = \tilde{b}$.

Eine erste Konsequenz des Mikroaffinitätsaxioms ist, dass die Menge Δ anders als in klassischer Mathematik nicht nur die Null enthält.

Proposition 4.1. *Es stimmt nicht, dass* $\Delta = \{0\}$.

Beweis. Angenommen, es wäre doch der Fall, dass $\Delta = \{0\}$. Dann erhalten wir mit der Eindeutigkeitsaussage im Axiom der Mikroaffinität einen Widerspruch: Betrachten wir die konstante Funktion $f : \Delta \to \mathbb{R}$, $\varepsilon \mapsto 0$. Dann gelten für alle ε in Δ – das ist etwas verklausuliert gesprochen, denn nach Annahme enthält Δ ja nur die Null – *beide* der folgenden Gleichungen:

$$f(\varepsilon) = 0 + 0 \cdot \varepsilon, \qquad f(\varepsilon) = 0 + 1 \cdot \varepsilon.$$

[5] In der Schule nennt man solche Funktionen *linear*. In Universitätsmathematik ist dieser Begriff nur solchen affinen Funktionen vorbehalten, deren Achsenabschnitt Null ist.

Wegen der Eindeutigkeitssaussage müsste daher $0 = 1$ sein. Das ist aber ein Widerspruch zum Axiom $0 \neq 1$. □

Wir sind hier also in einer etwas sonderbaren Situation: In klassischer Mathematik gilt $\Delta = \{0\}$, das Axiom der Mikroaffinität impliziert aber $\Delta \neq \{0\}$. Ferner können wir auch mit dem Axiom keine Zahl in Δ (außer der Null) explizit angeben. Beide Paradoxien müssen wir auflösen, um wieder produktiv arbeiten zu können. Zunächst aber wollen wir ein paar Rechnungen anstellen, um den Umgang mit dem Axiom der Mikroaffinität zu üben.

Aufgabe 8. *Eine erste korrekte Rechnung mit infinitesimalen Zahlen*

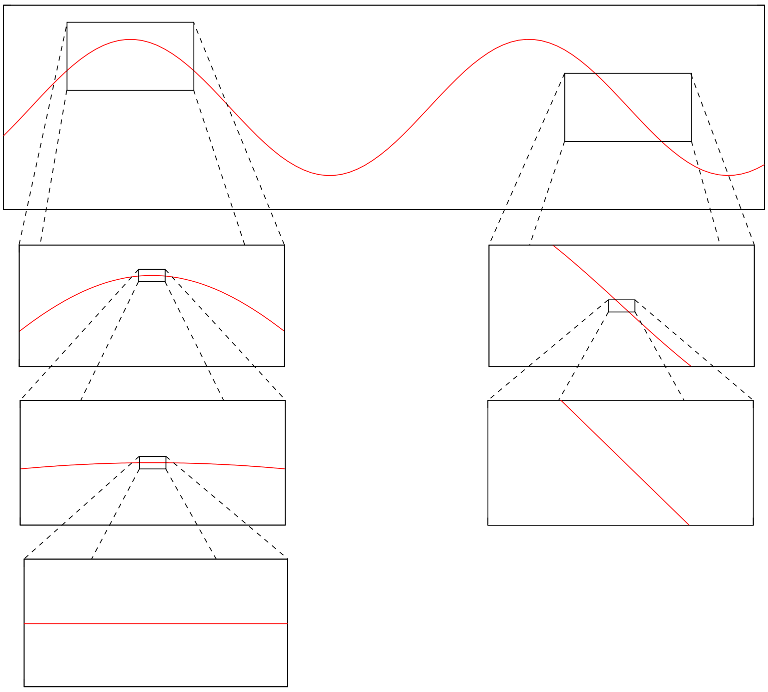
Sei ε eine Zahl in Δ. Vereinfache dann den Ausdruck

$$(x + \varepsilon)^2 - x^2$$

so weit wie möglich. Das geht ähnlich wie bei unserer Berechnung der Ableitung der Quadratfunktion. Am Ende wird (unter anderem) ein ε stehen bleiben, ε^2 wird aber nicht vorkommen.

Das Axiom der Mikroaffinität wirst du dazu noch nicht benötigen – aber ohne es wäre die Rechnung langweilig, denn dann wäre ja $\varepsilon = 0$ die einzige infinitesimale Zahl.

Abbildung 3 Auf infinitesimalen Umgebungen sind Funktionen affin.



Aufgabe 9. *Magneteigenschaft infinitesimaler Zahlen*

Die infinitesimalen Zahlen haben folgende *Magneteigenschaft*: Das Produkt einer beliebigen Zahl mit einer infinitesimalen Zahl ist wieder eine infinitesimale Zahl.

Beweise das! Sei dazu x eine beliebige reelle Zahl und ε eine infinitesimale Zahl, also eine solche, deren Quadrat Null ist. Zeige dann, dass $x \cdot \varepsilon$ ebenfalls infinitesimal ist.

Aufgabe 10. *Invertierbarkeit infinitesimaler Zahlen*

Infinitesimale Zahlen sind nicht so weit von der Null verschieden, als dass sie invertierbar sein könnten. Das wollen wir in dieser Aufgabe beweisen. Ergänze folgenden Beweisanfang:

Sei ε in Δ. Angenommen, ε wäre doch invertierbar. Nach Definition der Invertierbarkeit würde es dann eine weitere Zahl y mit der Eigenschaft $\varepsilon \cdot y = 1$ geben. Dann ...

Aufgabe 11. *Das Prinzip der Mikrokürzbarkeit*

a) Sei x eine invertierbare reelle Zahl (das heißt, dass es eine Zahl y mit $xy = 1$ gibt). Seien ferner a und b reelle Zahlen. Zeige:

$$\text{Wenn } xa = xb, \text{ dann } a = b.$$

Invertierbare Zahlen kann man also in Gleichungen kürzen. Das ist für dich natürlich nichts Neues, vielleicht ist das aber das erste Mal, dass du einen Beweis dieser elementaren Tatsache führst.

b) In manchen Zahlenbereichen gibt es auch Zahlen, die nicht invertierbar, aber trotzdem aus Gleichungen kürzbar sind. Fällt dir etwa ein Beispiel im Bereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ein?

c) Ob einzelne infinitesimale Zahlen kürzbar sind oder nicht, können wir mit den gegebenen Axiomen nicht entscheiden. (Sicherlich sind nicht alle infinitesimale Zahlen kürzbar, denn die Null ist ja auch eine infinitesimale Zahl.) Es gilt jedoch folgendes Prinzip der *Mikrokürzbarkeit*:

$$\text{Wenn } \varepsilon a = \varepsilon b \text{ für } \textit{alle } \varepsilon \text{ in } \Delta, \text{ dann } a = b.$$

Beweise dieses Prinzip! Dazu wirst du das Axiom der Mikroaffinität verwenden und eine geeignete Hilfsfunktion $f : \Delta \to \mathbb{R}$ definieren müssen.

d) Bewundere den Umstand, dass das Prinzip der Mikrokürzbarkeit in klassischer Mathematik falsch ist. Wieso? Gib ein explizites Gegenbeispiel, also zwei verschiedene reelle Zahlen a und b, sodass trotzdem für alle ε in Δ die Gleichung $\varepsilon a = \varepsilon b$ gilt.

Aufgabe 12. *Summen infinitesimaler Zahlen*

Zeige, dass es nicht stimmt, dass die Summe zweier infinitesimaler Zahlen stets wieder infinitesimal ist. Führe dazu die Behauptung, dass dem doch so wäre – dass also $(\varepsilon+\delta)^2 = 0$ für alle Zahlen ε und δ mit $\varepsilon^2 = \delta^2 = 0$ wäre, zu einem Widerspruch.

Tipp: Verwende das Prinzip der Mikrokürzbarkeit (Aufgabe 11).

Aufgabe 13. *Schnittberechnung II*

Auf der x-Achse ruhe ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0|1)$. Überprüfe rechnerisch, dass die Schnittpunkte von Kreis und x-Achse genau die folgenden sind: $(\varepsilon|0)$ mit ε in Δ.

Dieses Beispiel stammt übrigens vom griechischen Philosophen Protagoras (* vermutlich um 490 v. Chr., † vermutlich um 411 v. Chr.). Er war der Auffassung, der Schnitt bestehe nicht nur aus einem einzelnen Punkt, sondern einem *infinitesimalen Geradenstück*. Deine Rechnung wird diese Auffassung bestätigen.

Tipp: Schlage die *Kreisgleichung* auf Wikipedia nach oder leite sie mit dem Satz des Pythagoras her. Die Rechnung selbst ist dann ähnlich wie bei Aufgabe 1.

5 Differentialrechnung mit infinitesimalen Zahlen

Die Ableitung von Funktionen können wir mit dem Axiom der Mikroaffinität deutlich leichter einführen.

Definition 5.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Stelle. Dann heißt die eindeutig bestimmte Zahl b, für die für alle ε in Δ die Gleichung

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon b$$

gilt, die *Ableitung von f an der Stelle x_0*. Wir schreiben dann auch „$f'(x_0)$“ für diese Zahl b.

Abbildung 4 illustriert die Intuition hinter dieser Definition: In einer infinitesimalen Umgebung von x_0 sieht der Graph von f wie eine Gerade aus, nämlich genauer wie die Tangentialgerade durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$. Also sieht auch der Term $f(x_0 + \varepsilon)$ wie der Term einer affinen Funktion aus. An der Stelle $\varepsilon = 0$ hat er den Wert $f(x_0)$, für andere infinitesimale ε weicht er von $f(x_0)$ um $b\varepsilon$ ab.

Wir werden die definierende Gleichung oft in folgender umgestellten Form verwenden:

$$f'(x_0) \cdot \varepsilon = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0).$$

Die Definition ist nur dann sinnvoll, wenn garantiert ist, dass es eine solche Zahl b wirklich gibt und dass sie *eindeutig* ist, dass es also auch *nur* eine solche Zahl gibt. Daher müssen wir folgende Aufgabe bearbeiten.

Aufgabe 14. *Sinn der neuen Ableitungsdefinition*

Verwende das Axiom der Mikroaffinität, um zu zeigen, dass es eine Zahl b wie in Definition 5.1 gibt und dass sie eindeutig ist. Dazu wirst du eine gewisse Hilfsfunktion $g : \Delta \to \mathbb{R}$ definieren müssen.

Die Definition offenbart übrigens ein weiteres Paradox: In klassischer Mathematik gibt es ja auch Funktionen, die nicht differenzierbar sind, etwa weil sie wie die Betragsfunktion Knickstellen besitzen (siehe Aufgabe 5). Hier aber ist *jede* Funktion differenzierbar! Auch dieses Paradox werden wir zu gegebener Zeit auflösen.

Wir haben jetzt die Technologie so weit entwickelt, um mit Hilfe infinitesimaler Zahlen Funktionen auf einfache Art und Weise ableiten zu können. Das wollen wir zunächst an der Quadratfunktion illustrieren.

Proposition 5.2. *Die Ableitung der Quadratfunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ *ist* $f'(x) = 2x$.

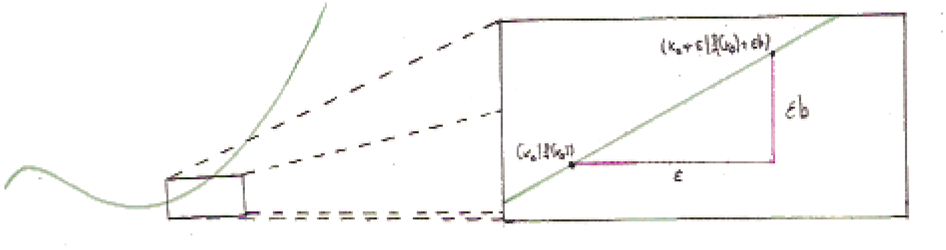
Beweis. Für alle ε in Δ gilt

$$f'(x) \cdot \varepsilon = f(x + \varepsilon) - f(x) = \ldots \text{ siehe Aufgabe 8 } \ldots = 2x \cdot \varepsilon.$$

Da diese Rechnung für *alle* ε in Δ gilt, können wir nach dem Prinzip der Mikrokürzbarkeit (Aufgabe 11) die Behauptung folgern: $f'(x) = 2x$. □

Dieser Beweis vereint die Einfachheit des typischen PhysikerInnen-Arguments (Seite 5) ohne sich in Widersprüchen zu verfangen: Zu keinem Zeitpunkt teilen wir durch infinitesimale Zahlen (das ginge auch nicht, denn nach Aufgabe 10 sind sie nicht invertierbar), und wir benutzen konsistent die zulässige Rechenregel $\varepsilon^2 = 0$ (nicht aber $\varepsilon = 0$). Im Kontext der synthetischen Differentialgeometrie erfüllt der Beweis alle Anforderung an mathematische Rigorosität.

Abbildung 4 Um den Punkt $(x_0|f(x_0))$ ist f affin mit Steigung b.



Aufgabe 15. *Ableitung der Kubikfunktion II*

Leite nach demselben Muster wie in Proposition 5.2 die Kubikfunktion $x \mapsto x^3$ ab.

Aufgabe 16. *Ableitung der Kehrwertfunktion*

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ die Kehrwertfunktion. Bestimme nach demselben Muster wie in Proposition 5.2 ihre Ableitung. Das Ergebnis sollte natürlich $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sein.

Hinweis: Klammere $\frac{1}{x}$ aus. An einer Stelle wirst du die Vereinfachungsregel

$$\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{x}} = 1 - \frac{\varepsilon}{x}$$

benötigen.[6] Beweise diese Regel, indem du die Probe durchführst:

$$(1 + \tfrac{\varepsilon}{x}) \cdot (1 - \tfrac{\varepsilon}{x}) = \cdots = 1.$$

Aufgabe 17. *Ableitungsregeln*

In klassischer Mathematik sind die Summen-, Produkt- und Kettenregel sehr nützlich. Diese gibt es auch in synthetischer Differentialgeometrie. In dieser Aufgabe möchten wir sie mit Hilfe infinitesimaler Zahlen beweisen.

Seien also f und g Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige:

a) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

b) $(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

c) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Tipp: Für die Summenregel lautet der Ansatz wie folgt:

$$\begin{aligned}(f + g)'(x) \cdot \varepsilon = (f + g)(x + \varepsilon) - (f + g)(x) = \\ [f(x + \varepsilon) + g(x + \varepsilon)] - [f(x) + g(x)] = \cdots .\end{aligned}$$

Ferner solltest du keine Angst vor der Kettenregel haben. Die Schreibweise ist vielleicht etwas ungewohnt, der Ansatz ist aber ganz einfach:

$$(f \circ g)'(x) \cdot \varepsilon = f(g(x + \varepsilon)) - f(g(x)) = \cdots .$$

[6] Wie kommt man auf diese Regel? Ganz allgemein gibt es eine Formel für die *geometrische Reihe*: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Diese Formel gilt immer dann, wenn der Nenner $1-q$ invertierbar ist. Eine Variante

Aufgabe 18. *Ableitung der Umkehrfunktion*

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt genau dann *umkehrbar*, wenn es zu jeder Zahl y aus $\mathbb{R}$ eine und nur eine Zahl x mit $f(x) = y$ gibt. Anschaulich bedeutet das, dass jede Parallele zur x-Achse den Graph von f in einem und nur einem Punkt schneidet. Für eine solche Funktion kann man die *Umkehrfunktion* f^{-1} definieren: Wenn $f(x) = y$, dann $f^{-1}(y) = x$.

Für die Ableitung der Umkehrfunktion einer umkehrbaren Funktion gibt es die Regel

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

a) Ist die Quadratfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ umkehrbar? Für welche Steigungen m ist die affine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto mx + t$ umkehrbar?

b) Beweise die Regel über die Ableitung der Umkehrfunktion mit Hilfe infinitesimaler Zahlen.

   Tipp: Wende auf beide Seiten der Gleichung $f^{-1}(y + \varepsilon) = f^{-1}(y) + (f^{-1})'(y) \cdot \varepsilon$ die Funktion f an.

c) Beweise die Regel mit Hilfe der Kettenregel, indem du ausnutzt, dass $f \circ f^{-1}$ die *Identitätsfunktion* $x \mapsto x$ ist.

d) Finde eine grafische Veranschaulichung der Regel!

   Tipp: Der Graph von f^{-1} ergibt sich aus dem von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. Zwei Steigungen m_1 und m_2 stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn $m_1 m_2 = -1$.

Aufgabe 19. *Ableitung der Sinusfunktion*

a) Verwende das Additionstheorem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$$

   um nach dem Muster von Proposition 5.2 die Ableitung der Sinusfunktion zu bestimmen.

   Hinweis: Verwende, dass $\sin\varepsilon = \varepsilon$ und $\cos\varepsilon = 1$ für alle infinitesimalen Zahlen ε.

b) In dieser Teilaufgabe wollen wir heuristisch verstehen, wieso der angegebene Hinweis korrekt ist. Zeichne dazu den Einheitskreis und trage beim Punkt $(1|0)$ beginnend

---

der Formel gilt sogar ohne Einschränkungen: $(1 - q) \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 - q^{n+1}$. Wenn nun q so geartet ist, dass q^2 Null ist, vereinfacht sich diese Formel. Der Unterschied zur angegebenen Vereinfachungsregel ist dann nur noch ein Vorzeichen.

Wenn du möchtest, kannst du alternativ auch nachsehen, wie man den Kehrwert einer Zahl geometrisch konstruieren kann. Überzeuge dich dann grafisch, dass der Kehrwert von $1 + \varepsilon$ die Zahl $1 - \varepsilon$ ist, wenn ε eine beliebige infinitesimale Zahl ist.

nach oben eine Strecke der Länge ε auf der Kreislinie ab, wobei ε eine infinitesimale Zahl ist. Beachte, dass die Kreislinie in infinitesimalen Umgebungen des Punkts $(1|0)$ *genau senkrecht* verläuft! Zeichne nun ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck in deine Skizze ein; es soll Hypotenuse 1 und Winkel ε (Bogenmaß) haben. Wie lang sind seine Katheten? Damit kannst du den Hinweis beweisen.

c) Auch der Tangens ist die Länge einer geeigneten Strecke in der Skizze aus Teilaufgabe b). Schlage nach, von welcher. Bestätige damit: $\tan \varepsilon = \varepsilon$ für alle ε in Δ.

Aufgabe 20. *Eine kuriose Rechenregel*

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweise für alle Zahlen ε in Δ die Rechenregel

$$\varepsilon \cdot g(\varepsilon) = \varepsilon \cdot g(0).$$

Diese werden wir später im Beweis, dass synthetisch berechnete Ableitungen mit den gewöhnlichen übereinstimmen, verwenden.

Tipp: Verwende die Gleichung für die Definition der Ableitung von g.

Aufgabe 21. *Lokale Minimal- und Maximalstellen*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Befinde sich in x_0 ein *(schwaches) lokales Minimum*, das soll bedeuten: Für alle ε in Δ gilt $f(x_0 + \varepsilon) \geq f(x_0)$.

a) Wie sieht der Funktionsgraph von f auf der infinitesimalen Monade um x_0 aus? Bedenke, dass nach dem Axiom der Mikroaffinität Funktionen auf infinitesimalen Umgebungen affin sind.

b) Beweise, dass $f'(x_0) = 0$.

Bemerkung: Rigoros kannst du das gar nicht machen, da ich die Anordnungsaxiome nicht verraten habe. Aber vielleicht hast du trotzdem Spaß daran, es informal zu versuchen. Wenn ε infinitesimal ist, dann auch $-\varepsilon$ (wieso?).

c) Was passiert bei lokalen *Maximal*stellen?

6 Das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten

Es stellt sich heraus, das von den vielen Axiomen klassischer Mathematik *genau eines* mit dem Axiom der Mikroaffinität unverträglich ist, nämlich das *Axiom vom ausgeschlossenen Dritten*. Wir können nicht beide verwenden, wohl aber das eine ohne das andere. In klassischer Mathematik verwendet man das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten, aber nicht das Axiom der Mikroaffinität; in synthetischer Differentialgeometrie ist es umgekehrt. Die beiden mathematischen Welten sind gleichermaßen konsistent.

Was lautet nun diese konfliktreiche Axiom?

Axiom vom ausgeschlossenen Dritten. Eine jede Aussage stimmt oder stimmt nicht.

Man darf sich berechtigterweise fragen, was denn an diesem Axiom problematisch sei: Ist es nicht schlichtweg *offensichtlich wahr*? Eine pragmatische Antwort auf diese Frage ist, dass man synthetische Differentialgeometrie nun einmal nur ohne dieses Axiom betreiben kann; gewissermaßen ist der Preis für die schöne infinitesimale Welt der, dass wir auf dieses grundlegende logische Axiom verzichten müssen. Es gibt auch noch bessere Antworten auf diese Frage, von denen wir eine weiter unten skizzieren werden.

In der mathematischen Praxis verwendet man das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten im Vergleich zu anderen logischen Axiomen nicht besonders oft, aber durchaus gelegentlich. Etwas tückisch an dem Axiom ist, dass man seine Verwendung nicht so leicht bemerkt, wenn man nicht absichtlich sein Auge diesbezüglich schult. Das liegt daran, dass es gewissermaßen in unsere Sprache und unser Wahrheitsempfinden eingebaut ist.

Wir müssen uns also zunächst einmal klarmachen, in welchen Beweisen das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten wesentlich eingeht. Beispiele für solche Situationen sind die folgenden:

- **Leere und bewohnte Mengen.** Sei M eine Menge. Sei die Aussage, dass M leer ist, falsch. Dann erwarten wir, dass M irgendein Element enthält.
- **Doppelte Verneinungen.** Sei eine Aussage *nicht nicht* wahr. Dann erwarten wir, dass sie schlichtweg wahr ist: Wenn es *nicht nicht* regnet, dann regnet es.
- **Null oder nicht Null.** Sei x eine reelle Zahl. Dann erwarten wir, dass x entweder Null oder nicht Null ist.
- **Mengen reeller Zahlen.** Sei $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 0 \text{ oder } x \neq 0\}$. Diese Menge enthält all diejenigen reellen Zahlen, die Null sind oder nicht Null sind. Wir erwarten also, dass M schlichtweg *alle* reelle Zahlen enthält.

All diese Schlussfolgerungen sind nur mit dem Axiom vom ausgeschlossenen Dritten möglich. Hier sind die entsprechenden Beweise.[7]

[7]Eigentlich zeigen die Argumente nur, dass ein Beweis *mit* dem Axiom vom ausgeschlossenen Dritten möglich ist; nicht aber, dass ein Beweis ohne es nicht möglich ist. Das stimmt auch, und lässt sich beweisen! Leider muss man etwas tiefer in mathematische Logik einsteigen, um das zu verstehen. Ein in Deutsch formulierter Beweis ist zwar möglich, hat aber ohne geeigneten logischen Hintergrund nur wenig Überzeugungskraft, denn um die Subtilitäten rund um das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten handhaben zu können, benötigt man eine präzise formale Sprache.

Dass auch das dritte Beispiel das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten benötigt, ist etwas gelogen – ein bestimmtes schwächeres Axiom, das man normalerweise nie erwähnt, weil es eine Konsequenz vom Axiom vom ausgeschlossenen Dritten ist, genügt auch schon, um diesen Umstand zu beweisen. Für das Folgende spielt diese Feinheit keine Rolle.

Proposition 6.1. *Wenn eine Menge M nicht leer ist, dann enthält sie ein Element.*

Beweis. Nach dem Axiom vom ausgeschlossen Dritten enthält M ein Element oder nicht. Im ersten Fall sind wir fertig. Der zweite Fall kann nicht eintreten, denn wenn M kein Element enthält, dann ist M leer. Nach Voraussetzung ist M aber nicht leer. □

Proposition 6.2. *Wenn eine Aussage* nicht nicht *wahr ist, so ist sie wahr.*

Beweis. Nach dem Axiom vom ausgeschlossen Dritten ist die gegebene Aussage wahr oder falsch. Im ersten Fall sind wir fertig. Der zweite Fall kann nicht eintreten, denn die Aussage ist nach Voraussetzung *nicht nicht wahr*, also *nicht falsch.* □

Nach diesen Beispielen stellt man sich vielleicht besorgt die Frage, welche weiteren mathematischen Sachverhalte vom Axiom vom ausgeschlossenen Dritten abhängen und wie man erkennen kann, ob sich eine Behauptung auch ohne das Axiom beweisen lässt. Zum Glück gibt es dafür eine einfache Heuristik: Genau dann lässt sich etwas auch ohne das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten beweisen, wenn man in endlicher Zeit einen entsprechenden *expliziten Beleg* angeben kann.

Etwa ist ein Beleg der Behauptung, dass eine gegebene Menge ein Element enthält, eine konkrete Präsentation eines solchen Elements. Zum Beispiel ist ein Beleg der Behauptung, die Menge aller Quadratzahlen enthalte ein Element, die Quadratzahl $25 = 5^2$. Mit dem Denken in Belegen können wir die obigen Beispiele besser nachvollziehen:

- **Leere und bewohnte Mengen.** Sei M eine Menge. Sei die Aussage, dass M leer ist, falsch. Dann wissen wir zwar, dass M irgendein Element enthalten muss. Wir können aber kein solches Element explizit angeben; wir können also keinen Beleg der Behauptung, M enthalte ein Element, produzieren.

  Im Alltag ist dieses Phänomen wohlbekannt: Angenommen, wir finden gerade unseren Wohnungsschlüssel nicht. Wir wissen, dass die Menge derjenigen Positionen, wo sich der Schlüssel befindet, nicht leer ist – denn letzte Nacht haben wir mit dem Schlüssel die Tür aufgesperrt. Wir können aber kein Element dieser Menge explizit angeben, also keinen Beleg dafür produzieren, dass die Menge wirklich ein Element enthält.[8]

- **Doppelte Verneinungen.** Sei eine Aussage *nicht nicht* wahr. Dann wissen wir also, dass sie nicht falsch und daher wahr sein muss. Wir können aber trotzdem keinen Beleg für die Aussage angeben.

- **Null oder nicht Null.** Sei x eine reelle Zahl. Dann ist x natürlich entweder Null oder nicht Null. Aber im Allgemeinen können wir in endlicher Zeit keinen Beleg dieser Behauptung produzieren: In endlicher Zeit können wir im Allgemeinen zwar beliebig viele, aber nicht alle, Nachkommaziffern von x berechnen. Sollte x tatsächlich Null sein, können wir uns nach Überprüfung von nur endlich vielen

[8] Das Beispiel hinkt, denn ob *wir* etwas produzieren können oder nicht, ist für die Mathematik unerheblich.

Nachkommaziffern nie sicher sein, ob nicht doch noch eine von Null verschiedene Ziffer auftreten wird. Wir können also die wahre Aussage „$x = 0$“ nicht belegen.

Bemerkung 6.3. Es war ein Video aufgetaucht, dass Kate Moss beim Konsumieren von Drogen zeigte, und zwar entweder solche von einem Typ A oder solche von einem Typ B. Welcher Typ aber tatsächlich vorlag, konnte nicht entschieden werden. Also gab es für keine der beiden Strafttaten einen Beleg, Kate Moss wurde nicht strafrechtlich verfolgt.

7 Auflösung der Paradoxien

In den letzten Abschnitten haben wir gesehen, dass infinitesimale Zahlen nützlich und praktisch sind. Wir haben auf dem Weg jedoch auch einige Paradoxien aufgesammelt:

1. In klassischer Mathematik gilt $\Delta = \{0\}$. Das Axiom der Mikroaffinität impliziert aber $\Delta \neq \{0\}$.
2. Obwohl $\Delta \neq \{0\}$, wenn wir das Mikroaffinitätsaxiom annehmen, sind wir trotzdem nicht in der Lage, andere Elemente aus Δ als die Null explizit anzugeben.
3. In klassischer Mathematik gibt es viele Funktionen, die nicht differenzierbar sind. Unter unserem neuen Ableitungsbegriff (Definition 5.1), der auf dem Axiom der Mikroaffinität beruht, ist aber jede Funktion differenzierbar.

Diese Paradoxien werden wir nun auflösen. Zunächst halten wir fest:

Proposition 7.1. *Das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten ist unverträglich mit dem Axiom der Mikroaffinität. Die restlichen Axiome klassischer Mathematik sind aber durchaus mit dem Mikroaffinitätsaxiom verträglich.*

Beweis. Einen Beweis der Unverträglichkeit haben wir eigentlich schon gesehen: In Gegenwart des Axioms vom ausgeschlossenen Dritten liegt gewöhnliche klassische Mathematik vor. In dieser gilt $\Delta = \{0\}$. Das Axiom der Mikroaffinität impliziert aber $\Delta \neq \{0\}$ (Proposition 4.1). Beides zusammen kann nicht gelten.

Der Grund, wieso in klassischer Mathematik Δ nur die Null enthält, ist auch wirklich das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten. Ein Beweis läuft nämlich so: Jede Zahl in Δ ist Null oder nicht Null (!). Der zweite Fall kann nicht eintreten, denn eine Zahl, die nicht Null ist, ist invertierbar (Axiom auf Seite 8) – die Zahlen aus Δ sind aber nicht invertierbar (Aufgabe 10). Bleibt also nur der erste Fall.

Dass umgekehrt die restlichen Axiome klassischer Mathematik mit dem Mikroaffinitätsaxiom verträglich sind, also keinen Widerspruch produzieren, ist schwieriger zu sehen. Das diskutieren wir im nächsten Abschnitt. $\square$

Der im ersten Paradox genannte Sachverhalt ist nur dann wirklich paradox, wenn man erwartet, in synthetischer Differentialgeometrie dieselben Axiome wie in klassischer

Mathematik verwenden zu können. Das stimmt aber nicht, denn in synthetischer Differentialgeometrie verwenden wir nicht das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten (dafür aber das Axiom der Mikroaffinität).

Das zweite Paradox hat folgende Auflösung: Ohne das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten kann man gar nicht erwarten, aus $\Delta \neq \{0\}$ schließen zu können, dass sich in Δ noch andere Zahlen als die Null befinden. Das hat denselben Grund wie der Sachverhalt, dass man ohne das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten nicht folgern kann, dass Mengen, welche nicht leer sind, Elemente enthalten.

Das dritte Paradox löst sich wie folgt auf: Ohne das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten lassen sich nicht differenzierbare Funktionen *gar nicht definieren.* Denkt man etwa an eines der Beispiele aus Aufgabe 5,

$$x \longmapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

so sieht man: Die zur Definition genutzte Fallunterscheidung ist gar nicht vollständig, wenn man nicht das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten zur Verfügung hat – denn ohne das Axiom kann man nicht unterstellen, dass jede reelle Zahl x entweder gleich Null oder ungleich Null ist. Diese Zuordnungsvorschrift definiert also gar keine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – nur eine Funktion $M \to \mathbb{R}$, wobei $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ oder } x \neq 0\}$. Auf solche ist unsere Definition der Differenzierbarkeit auch nicht anwendbar.

Aus Sicht der Differentialgeometrie ist es ein Vorteil, dass es in synthetischer Differentialgeometrie keine nicht differenzierbaren Funktionen gibt, denn in der Differentialgeometrie beschäftigt man sich sowieso nur mit differenzierbaren Funktionen. Mit dem Axiom der Mikroaffinität passt man also das logische System an die Bedürfnisse von Differentialgeometrie an.

Für andere Teilbereiche der Mathematik ist dieser Vorteil aber zugleich ein gravierender Nachteil, zum Beispiel in der Finanzmathematik: Börsenkursverläufe sind nicht differenzierbar. Ebenso ist synthetische Differentialgeometrie nicht in Teilgebieten der Mathematik wie der Analysis partieller Differentialgleichungen anwendbar, in denen es auf die genaue *Regularität* von Funktionen ankommt – grob ist das die Frage, wie oft eine Funktion differenzierbar ist und wie schnell sie zu den Grenzen des Definitionsbereichs hin abfällt.

Aufgabe 22. *Schwebezustand infinitesimaler Zahlen*

Zeige, dass jede infinitesimale Zahl *nicht nicht* Null ist. Ergänze dazu folgenden Beweisanfang: *Sei ε eine infinitesimale Zahl. Wir wollen zeigen, dass ε* nicht nicht *Null ist. Angenommen, ε wäre doch nicht Null. Dann …*

Bemerkung: Das heißt *nicht*, dass jede infinitesimale Zahl Null ist! Das würde dem Axiom der Mikroaffinität widersprechen (Proposition 4.1). Dieses Kunststück – *nicht nicht* Null zu sein ohne Null zu sein – ist nur ohne das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten möglich. Mit dem Axiom dagegen könnte man sofort die doppelte Verneinung eliminieren.

Bemerkung 7.2. In klassischer Mathematik ist jede reelle Zahl entweder kleiner, gleich oder größer als Null. In synthetischer Differentialgeometrie gilt eine abgeschwächte Variante: Jede reelle Zahl x ist entweder kleiner als Null, größer als Null oder *infinitesimal nahe an Null* – das bedeutet, dass für alle positiven natürlichen Zahlen n die Zahl x zwischen $-\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n}$ liegt.

8 Verhältnis zur klassischen Mathematik

Die Paradoxien in synthetischer Differentialgeometrie, die uns aufgefallen sind, haben wir im vorherigen Abschnitt ausgeräumt: Mit dem Mikroaffinitätsaxiom hat sich nur das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten gebissen; ohne es haben sich die Paradoxien aufgelöst.

Damit ist aber noch nicht bewiesen, dass synthetische Differentialgeometrie wirklich in sich konsistent ist. Denn nur, dass *uns* keine weiteren Paradoxien aufgefallen sind, heißt ja noch nicht, dass es auch tatsächlich keine weiteren gibt. Um ruhigen Gewissens mit synthetischer Differentialgeometrie arbeiten zu können, müssen wir also noch einen *Konsistenzbeweis* erbringen – wir müssen beweisen, dass aus dem Axiom der Mikroaffinität keine widersprüchlichen Aussagen folgen. In diesem Abschnitt arbeiten wir wieder in klassischer Mathematik.

Die übliche Art und Weise, die Konsistenz eines formalen Axiomensystems nachzuweisen, besteht darin, ein *Modell* des Systems anzugeben. Das ist eine mathematische Struktur (innerhalb des gewöhnlichen mathematischen Universums), in der die Axiome des Systems alle erfüllt sind. Dieses Vorgehen funktioniert deswegen, weil inkonsistente Systeme keine Modelle zulassen.

Beispiel 8.1. Wir erweitern die üblichen Axiome der reellen Zahlen um eine Konstante $\heartsuit$ und das Axiom $\heartsuit^2 - 4 = 0$. Diese Erweiterung ist konsistent, denn ein mögliches Modell besteht aus den üblichen reellen Zahlen mit der Setzung $\heartsuit := 2$. Wenn wir außerdem noch das Axiom $\heartsuit + 1 = 4$ fordern, erhalten wir ein inkonsistentes System: In jedem Modell müsste wegen des ersten Axioms $\heartsuit$ entweder $+2$ oder -2 sein. Das zweite Axiom diktiert aber $\heartsuit = 3$.

Modelle für synthetische Differentialgeometrie anzugeben ist nicht schwer, erfordert jedoch Vorkenntnisse aus der *Topostheorie*, die wir hier leider nicht bereitstellen können. Da wir die Konstruktion eines solchen Modells an dieser Stelle nicht durchführen können, müssen wir das folgende Faktum ohne Beweis hinnehmen. Dieses Modell wird übrigens innerhalb des gewöhnlichen mathematischen Universums konstruiert. Gewissermaßen sind die gewöhnliche und die synthetische Welt also nicht Paralleluniversen, sondern ineinander verschachtelte Universen.

Faktum. Es gibt ein mathematisches Universum $\mathcal{U}$ mit folgenden Eigenschaften:

- In $\mathcal{U}$ gilt das Axiom der Mikroaffinität.
- Konsequenterweise gilt in $\mathcal{U}$ nicht das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten.
- Jede glatte Funktion ist in $\mathcal{U}$ enthalten.
- Beurteilt $\mathcal{U}$ zwei glatte Funktionen als gleich, so sind sie auch tatsächlich gleich.

Dabei heißt eine Funktion f genau dann *glatt*, wenn sie *unendlich oft* differenzierbar ist, wenn also nicht nur f selbst an jeder Stelle differenzierbar ist, sondern auch f', f'' und so weiter.

Das Faktum ergibt sich nicht aus allgemeinem Nonsens – in dem Beweis steckt inhaltliche mathematische Arbeit. Es gibt auch nicht für beliebige ausgedachte Axiome automatisch analoge Fakta.

Aufgabe 23. *Nicht glatte Funktionen*

a) Mache dir klar, dass folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwar differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar und daher nicht glatt ist.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ x^2, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Tipp: Fertige eine Skizze des Funktionsgraphen an. Mit der synthetischen Definition der Ableitung (Definition 5.1) hat diese Aufgabe nichts zu tun, da wir in diesem Abschnitt ja wieder im gewöhnlichen mathematischen Universum arbeiten.

b) Finde eine Funktion, die zweimal, aber nicht dreimal differenzierbar ist.

Der Schlüssel zur Verbindung zwischen gewöhnlichen Ableitungen und Ableitungen, die in der synthetischen Welt berechnet werden, liegt in dem *Lemma von Hadamard* aus der Analysis (benannt nach dem französischen Mathematiker Jacques Hadamard, * 1865, † 1963):

Lemma 8.2. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es eine weitere glatte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x folgende Gleichung gilt:*

$$f(x) = f(0) + x \cdot g(x).$$

Beweis. Wenn man die Integration als Gegenstück zur Differentiation kennt, kann man die gesuchte Funktion g explizit angeben. Ihr Funktionsterm lautet:

$$g(x) := \int_0^1 f'(tx)\, dt.$$

Diese Funktion ist wirklich glatt (wieso?) und erfüllt die geforderte Gleichung. Denn wenn wir die Hilfsfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = f(tx)$ einführen, sehen wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel

$$f(x) - f(0) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\,dt = \int_0^1 f'(tx)x\,dt = x \cdot \int_0^1 f'(tx)\,dt = x \cdot g(x). \quad \square$$

Die zu f gehörige Funktion g aus dem Lemma von Hadamard heißt auch *Hadamard-Quotient* von f. Das besondere an der Aussage des Lemmas ist, dass der Hadamard-Quotient g auf *ganz* $\mathbb{R}$ *definiert ist* (also keine Definitionslücken hat) und wieder glatt ist. Ohne die letzte Forderung hätte man für $x \neq 0$ auch einfach

$$g(x) := \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

definieren und für $x = 0$ den Funktionswert $g(0)$ beliebig festsetzen können. Anders formuliert: Der Bruch $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ hat zwar bei $x = 0$ eine Definitionslücke, diese ist jedoch *hebbar*.

Aufgabe 24. *Beispiele zum Lemma von Hadamard*

Finde durch geeignete Termumformungen zu jeder der folgenden Funktionen f den Hadamard-Quotienten, also eine Funktion g mit der Eigenschaft, dass $f(x) = f(0) + x \cdot g(x)$ für alle reellen Zahlen x.

a) $f(x) = 3 + 2x$.

b) $f(x) = x^2$.

c) $f(x) = x^2 - x$.

Aufgabe 25. *Eindeutigkeit des Hadamard-Quotienten*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Seien g und $\widetilde{g}$ beides Hadamard-Quotienten von f, gelte für alle reellen Zahlen x also

$$f(x) = f(0) + x \cdot g(x) \quad \text{und} \quad f(x) = f(0) + x \cdot \widetilde{g}(x).$$

Zeige: Die Funktionen g und $\widetilde{g}$ sind gleich.

Tipp: Für $x \neq 0$ kann man den Wert von $g(x)$ bzw. $\widetilde{g}(x)$ durch Umstellen explizit bestimmen.

Aufgabe 26. *Bedeutung des Hadamard-Quotienten*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und g der laut dem Lemma von Hadamard existente Hadamard-Quotient. Zeige: $g(0) = f'(0)$.

Tipp: Leite die Gleichung, die die Beziehung zwischen f und g beschreibt, ab.

Mit diesen Vorarbeiten können wir die Verbindung zwischen der synthetischen und der gewöhnlichen mathematischen Welt herstellen. Mit der nächsten Proposition beweisen wir, dass Endergebnisse über Funktionsableitungen, die im synthetischen Universum $\mathcal{U}$ gewonnen werden, auch im gewöhnlichen Sinn korrekt sind. Die Proposition erlaubt uns also, nach Belieben infinitesimale Zahlen zur Berechnung von Ableitungen zu verwenden. Das fertig vereinfachte Endergebnis (in dem dann keine infinitesimalen Zahlen mehr vorkommen) wird dann auch im gewöhnlichen mathematischen Universum korrekt sein.

Proposition 8.3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Gelte laut $\mathcal{U}$, dass $f'(0) = a$ für eine reelle Zahl a. Dann gilt auch im gewöhnlichen Sinn $f'(0) = a$.*

Beweis. Wenn wir mit g den Hadamard-Quotienten von f bezeichnen, gilt im gewöhnlichen Universum

$$f(x) = f(0) + x \cdot g(x)$$

für alle reellen Zahlen x. Diese Gleichung gilt dann auch in $\mathcal{U}$. Dort können wir insbesondere für x alle Zahlen aus Δ einsetzen, und erhalten also

$$\mathcal{U} \models f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon \cdot g(\varepsilon) \text{ für alle } \varepsilon \text{ in } \Delta.$$

Das Symbol vorne liest sich als „in dem Universum $\mathcal{U}$ gilt ...“. Aufgabe 20 spielte sich in $\mathcal{U}$ ab. Daher können wir das Resultat dieser Aufgabe verwenden und festhalten, dass

$$\mathcal{U} \models f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon \cdot g(0) \text{ für alle } \varepsilon \text{ in } \Delta.$$

Wenn wir dies mit der synthetischen Definition der Ableitung vergleichen, erhalten wir

$$\mathcal{U} \models g(0) = a.$$

Laut $\mathcal{U}$ gilt also $g(0) = a$. Daher gilt auch in der gewöhnlichen Welt $g(0) = a$ (siehe die vierte Aussage über $\mathcal{U}$ aus dem Faktum auf Seite 22). Nach Aufgabe 26 ist $g(0)$ der Wert der gewöhnlichen Ableitung von f an der Stelle 0, also folgt die Behauptung: $f'(0) = g(0) = a$. □

Aufgabe 27. *Verallgemeinerung der Proposition auf beliebige Stellen*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann besagt Proposition 8.3, dass die gewöhnliche Ableitung von f an der Stelle 0 mit der synthetisch berechneten Ableitung an der Stelle 0 übereinstimmt.

Verallgemeinere die Proposition auf beliebige Stellen. Zeige also, dass für jede reelle Zahl x die gewöhnliche Ableitung $f'(x)$ mit der synthetischen übereinstimmt.

Tipp: Betrachte eine Hilfsfunktion h mit $h(t) = f(t - x)$.

9 Ausblick

Geometrie. Die Differentialgeometrie ist ein modernes Teilgebiet der Mathematik mit vielen Verbindungen zu anderen Bereichen der Mathematik und Anwendungen in der allgemeinen Relativitätstheorie und Stringtheorie. Untersuchungsgegenstand der Differentialgeometrie sind *glatte Mannigfaltigkeiten* (das sind Kurven, Flächen und höherdimensionale Verallgemeinerungen) und *glatte Abbildungen* zwischen solchen (unendlich oft differenzierbare Funktionen).

Abbildungen, welche nicht glatt sind, interessieren in der Differentialgeometrie nicht. Für eine Logikerin oder einen Logiker ist es daher naheliegend, das mathematische Universum mit Hilfe spezieller Axiome auf diese besonderen Gegebenheiten anzupassen und so zu ermöglichen, *synthetisch* zu arbeiten.

Wir haben die Grundlagen dieses Zugangs kennengelernt. Mit dem Konzept infinitesimaler Zahlen könnte man nun die grundlegenden Begriffe der Differentialgeometrie entwickeln. Ein Beispiel muss an dieser Stelle genügen: Ein *Tangentialvektor* an eine gekrümmte Fläche M oder an ein allgemeineres Gebilde stellt man sich als ein infinitesimales Geradenstück vor, welches in der Fläche verläuft. In klassischer Mathematik muss man etwas Aufwand treiben, um diese Vorstellung zu formalisieren.

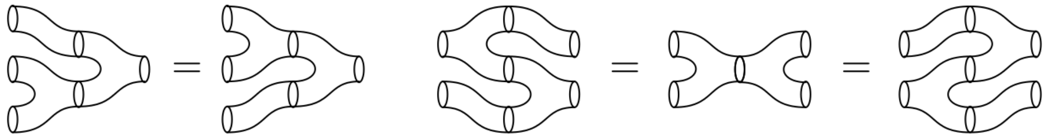
Bei synthetischer Differentialgeometrie ist es dagegen ganz einfach: Ein Tangentialvektor an M ist nichts anderes als eine Abbildung $f : \Delta \to M$, wobei Δ wie bisher auch die infinitesimale Monade um Null bezeichnet. Sein Fußpunkt ist der Punkt $f(0)$. In diesem Kontext gibt es für Δ auch die amüsante Bezeichnung *wandelnder Tangentialvektor*.[9]

Höhere Ableitungen und Integrationstheorie. Die synthetische Differentialrechnung haben wir mit *nilquadratischen* Zahlen aufgezogen – Zahlen, deren Quadrat Null ist. Für Untersuchungen erster Ableitungen ist das völlig ausreichend. Für höhere Ableitungen sind allgemeinere infinitesimale Zahlen nützlich – etwa Zahlen, deren *dritte* Potenz Null ist. Jede nilquadratische Zahl ist insbesondere *nilkubisch*, die Umkehrung aber gilt nicht. Nilkubische Zahlen werden durch ein Analogon zum Axiom der Mikroaffinität kontrolliert (Aufgabe 28).

Integrationstheorie haben wir im synthetischen Kontext überhaupt nicht betrieben. Das geht aber ebenfalls auf elegante Art und Weise (Aufgabe 29).

[9] Anmerkung für mitlesende Experten: Diese Bezeichnung sollte man eigentlich nicht für Δ selbst, sondern für die Identitätsabbildung $\Delta \to \Delta$ verwenden (wieso?).

Abbildung 5 Für *topologische Quantenfeldtheorien* wichtige *Kobordismusrelationen.*



Surreale und hyperreelle Zahlen. Surreale Zahlen (diese hatten wir ja zu Beginn des Zirkels kennengelernt) und hyperreelle Zahlen (als Einstieg eignet sich der Wikipedia-Artikel zum Thema) enthalten ebenfalls eine bestimmte Art infinitesimaler Zahlen. Wie vergleichen sich diese Ansätze mit dem von synthetischer Differentialgeometrie? Der größte Unterschied liegt darin, dass die infinitesimalen Zahlen in synthetischer Differentialgeometrie *nilquadratisch* sind – das heißt, dass ihre Quadrate Null sind. Das war ja in diesen Notizen sogar die Definition des Begriffs *infinitesimal*. Die infinitesimalen surrealen und hyperreellen Zahlen zeichnen sich dagegen dadurch aus, dass ihre Quadrate *nicht* Null, sondern *noch kleinere* infinitesimale Zahlen sind.

Außerdem sind die infinitesimalen surrealen und hyperreellen Zahlen invertierbar; die Kehrwerte solcher Zahlen sind transfinite Zahlen. Als Konsequenz bilden die surrealen und hyperreellen Zahlen einen *Körper* – jede Zahl ist entweder Null oder invertierbar. Die Zahlen in synthetischer Differentialgeometrie erfüllen nur die schwächere Bedingung, dass jede Zahl, die nicht Null ist, invertierbar ist.[10]

Zu guter Letzt gehören die surrealen und hyperreellen Zahlen zum üblichen mathematischen Universum. Sie funktionieren also auch im Kontext des Axioms vom ausgeschlossenen Dritten und benötigen keine eigenen *anti-klassischen* Axiome. Bei synthetischer Differentialgeometrie dagegen haben wir ja das anti-klassische Axiom der Mikroaffinität eingeführt und damit die gewöhnliche mathematische Welt verlassen.

Insbesondere sind die infinitesimalen surrealen und hyperreellen Zahlen schlichtweg *ungleich Null*, während das bei den infinitesimalen Zahlen in synthetischer Differentialgeometrie nicht der Fall ist: Sie sind *nicht nicht Null*, ohne aber Null zu sein – ein Kunststück, das nur ohne das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten möglich ist (Aufgabe 22).

Pauschal kann man nicht sagen, welches der drei Systeme am besten ist; das hängt von dem gewünschten Anwendungsfall ab. Nilquadratische infinitesimale Zahlen sind für die Differentialrechnung sehr praktisch, weil sie Rechnungen vereinfachen. Die invertierbaren infinitesimalen surrealen und hyperreellen Zahlen sind nützlich, wenn man einen Körper als Zahlbereich erhalten möchte oder auch an transfiniten Zahlen interessiert ist.

Die surrealen Zahlen haben ferner durch ihren Bezug zu kombinatorischer Spieltheorie eine Bedeutung. Ein Alleinstellungsmerkmal von hyperreellen Zahlen ist, dass sie über ein *Transferprinzip* verfügen, mit denen man aus bekannten Aussagen über die gewöhnlichen reellen Zahlen sofort Aussagen über die hyperreellen Zahlen gewinnen kann.

Intuitionistische Logik. Wenn man allgemein Mathematik ohne das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten betreibt, so nennt man das *intuitionistische* oder *konstruktive Mathematik*. Intuitionistische Mathematik ist gut dafür geeignet, um *Traumaxiome* zu studieren – das sind Axiome, die in klassischer Mathematik falsch sind. Neben dem

[10] Wenn die beiden Bedingungen für dich gleich klingen, dann liegt das daran, dass sie im Kontext des Axioms vom ausgeschlossenen Dritten auch tatsächlich äquivalent sind. Ohne dieses Axiom aber ist die erste Bedingung stärker als die zweite.

Axiom der Mikroaffinität gibt es noch eine Reihe anderer Traumaxiome, die interessant und nützlich sind und zu wundersamen mathematischen Universen führen.

Praktische Bedeutung hat intuitionistische Mathematik in der theoretischen Informatik und Numerik. Es stellt sich nämlich heraus, dass man aus jedem Beweis einer Existenzbehauptung, welcher ohne das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten geführt wird, ein Computerprogramm extrahieren kann, dass das postulierte Objekt explizit berechnet. Das ist mit Beweisen, die das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten verwenden, im Allgemeinen nicht möglich.

Ein anschauliches Beispiel für diesen Sachverhalt liefert die Frage, ob es irrationale Zahlen x und y gibt, sodass die Potenz x^y wieder rational ist. Zur Erinnerung: Eine reelle Zahl heißt genau dann *rational*, wenn sie als Bruch *ganzer Zahlen* geschrieben werden kann. Dass nicht alle Zahlen rational sind,[11] war im fünften Jahrhundert v. Chr. eine erstaunliche Entdeckung – manche sehen diese Entdeckung sogar als Geburtsstunde der modernen Mathematik an.[12]

Proposition 9.1. *Es gibt irrationale Zahlen x und y, sodass x^y rational ist.*

Beweis 1. Die Zahl $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational oder nicht rational. Im ersten Fall ist $x := \sqrt{2}$, $y := \sqrt{2}$ ein Beispiel für die Behauptung, im zweiten Fall $x := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y := \sqrt{2}$. □

Beweis 2. Setze $x := \sqrt{2}$ und $y := \log_{\sqrt{2}} 3$ (keine Angst vor Logarithmus- und Exponentialfunktion!). Dann ist die Potenz $x^y = 3$ sicher rational. Die Irrationalität von y lässt sich sogar einfacher als die von $\sqrt{2}$ beweisen: Gelte $y = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$. Da $y > 0$, können wir sogar $p, q \in \mathbb{N}$ annehmen. Dann folgt $3 = (\sqrt{2})^{p/q}$, also $3^{2q} = 2^p$. Das ist ein Widerspruch zum Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung, denn auf der linken Seite kommt der Primfaktor 3 vor, auf der rechten aber nicht. □

Der erste Beweis war *unkonstruktiv*, er hat das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten verwendet. Solange nicht geklärt ist, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nun rational oder irrational ist,[13] kann man immer noch nicht ein Zahlenpaar mit den gewünschten Eigenschaften nennen! Der zweite Beweis dagegen war konstruktiv: Die Existenzbehauptung wurde durch explizite Konstruktion eines Beispiels nachgewiesen.

---

[11] Zum Beispiel ist die Zahl $\sqrt{2}$ nicht rational. Wäre sie rational, so gäbe es ganze Zahlen p und q mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Nach Quadrieren und Umstellen gälte $2q^2 = p^2$. Denkt man an die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, sieht man, dass das nicht möglich ist: Auf der linken Seite der Gleichung kommt der Primfaktor 2 ungerade oft, rechts gerade oft vor – denn in Quadratzahlen kommen Primfaktoren stets gerade oft vor.

[12] Als Entdecker der Irrationalität gilt der griechische Mathematiker Hippasos von Metapont. Er erkannte, dass der *goldene Schnitt* irrational ist. Damit erschütterte er die Schule der Pythagoreer, denn diese waren von dem Kredo *Alles ist Zahl* überzeugt, wobei sie mit „Zahl“ *rationale Zahl* meinten. Ironischerweise kam der goldene Schnitt auch noch im Erkennungszeichen der Pythagoreer vor, dem Pentagramm.

[13] Tatsächlich ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nach dem Satz von Gelfond–Schneider aus der Zahlentheorie irrational. Zum Beweis dieses Satzes benötigt man aber nichttriviale Methoden aus der Funktionentheorie.

Literatur. Synthetische Differentialgeometrie ist nicht intrinsisch kompliziert. Leider setzt die meiste Literatur aber Vorkenntnisse aus einem Mathematikstudium voraus. Zum Durchblättern eignen sich die folgenden vier Quellen:

Andrej Bauer. *Intuitionistic mathematics for physics.* Ein Blog-Artikel. `http://math.andrej.com/2008/08/13/intuitionistic-mathematics-for-physics/`

John Bell. *A Primer of Infinitesimal Analysis.* Ein Buch, das für Physikerinnen und Physiker geschrieben ist. Online verfügbar.

Anders Kock. *Synthetic Differential Geometry.* Die Standardreferenz zum Thema. `http://home.imf.au.dk/kock/sdg99.pdf`

Mike Shulman. *Synthetic differential geometry.* Skript zu einem Pizzaseminar für Mathematikstudierende. `http://home.sandiego.edu/~shulman/papers/sdg-pizza-seminar.pdf`

Aufgabe 28. *Spiel und Spaß mit nilkubischen Zahlen*

Eine reelle Zahl ε heißt genau dann *nilkubisch*, wenn ihre dritte Potenz Null ist: $\varepsilon^3 = 0$. Kontrolliert werden nilkubische Zahlen durch folgende Verallgemeinerung des Axioms der Mikroaffinität:

Axiom der Mikroquadratizität. Sei $f : \Delta_3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dabei ist $\Delta_3 = \{\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon^3 = 0\}$ die Menge aller nilkubischen Zahlen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen a, b und c, sodass für alle ε in Δ_3 gilt: $f(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$.

a) Zeige, dass jede nilquadratische Zahl auch nilkubisch ist.

b) Das Axiom der Mikroquadratizität sagt aus, dass Funktionen, die auf der im Vergleich zu Δ größeren Menge Δ_3 definiert sind, zwar nicht mehr durch einen affinen, aber zumindest noch durch einen quadratischen Term beschrieben werden können. Illustriere diese Situation!

   Tipp: Vergleiche mit Abbildung 3.

c) Berechne für folgende Funktionen explizit $f(x + \varepsilon)$ für ε in Δ_3. Vereinfache also unter Verwendung der Rechenregel $\varepsilon^3 = 0$ so weit wie möglich.

   - $f(x) = x^2$.
   - $f(x) = x^3$.
   - $f(x) = x^4$.

   Vergleiche deine Ergebnisse mit den bekannten ersten und zweiten Ableitungen.

d) Überlege, wie man mit Hilfe nilkubischer Zahlen analog zu Definition 5.1 die zweite Ableitung definieren kann.

e) Zeige, dass die Annahme, jede nilkubische Zahl sei nilquadratisch, dem Axiom der Mikroquadratizität widerspricht.

   Tipp: Verallgemeinere den Beweis von Proposition 4.1.

Aufgabe 29. *Synthetische Integrationstheorie*

Der gewöhnliche Weg, bestimmte Integrale der Form $\int_a^b f(x)\,dx$ auszurechnen, besteht darin, eine *Stammfunktion* F von f zu finden – das ist eine Funktion mit $F' = f$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt dann nämlich $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. In klassischer Mathematik *beweist* man, dass eine solche Stammfunktion existiert. Im synthetischen Zugang zur Integrationstheorie *fordert* man das durch ein neues Axiom:

Integrationsaxiom. Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es eine und nur eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ und $F(0) = 0$.

a) Berechne über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (der im synthetischen Zugang kein *Satz*, sondern eine *Definition* ist) folgende bestimmten Integrale:
   - $\int_a^b x^2\,dx$.
   - $\int_a^b \sin(x)\,dx$.

b) Beweise folgende Integrationsregeln:
   - $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
   - $\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$.
   - $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$.

   Tipp: In jedem der drei Fälle kannst du ausgehend von Stammfunktionen F und G für f bzw. g Stammfunktionen für die neuen Integranden finden.

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle Zahlen x. Zeige, dass f konstant ist.

   Tipp: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Abbildung 3 ist dem Wikimedia-Archiv entnommen und zur Illustration des Mikroaffinitätsaxioms leicht angepasst. `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fa/Approximation_of_cos_with_linear_functions_without_numbers.svg`

Abbildung 5 ist dem Buch *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories* von Joachim Kock entnommen (Seite 4).